FOURIER-TRANSZFORMÁCIÓ

1. Definíció. *Legyen az f függvény abszolút integrálható. Ekkor az F* Frourier-transzformáltja*:*

$$\mathcal{F}[f](\omega) = F(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Az F függvény inverz Fourier-transzformáltja*:*

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} F(\omega)\,\mathrm{d}\omega. \tag{7}$$

6. Tétel. *Legyen f és g két abszolút integrálható függvény, Fourier-transzformáltjukat jelölje F és G. Ekkor*

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha F + \beta G, \qquad \textit{(linearitás)} \tag{9a}$$

$$\mathcal{F}\left[x \mapsto f\left(\frac{x}{a}\right)\right](\omega) = |a| \cdot F(a\omega), \qquad \textit{(hasonlósági, vagy dilatációs tétel)} \tag{9b}$$

$$\mathcal{F}[x \mapsto f(x - x_0)](\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x_0} F(\omega), \qquad \textit{(eltolási tétel)} \tag{9c}$$

$$\mathcal{F}[x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x} f(x)](\omega) = F(\omega - \omega_0), \qquad \textit{(modulációs tétel),} \tag{9d}$$

$$\mathcal{F}[x \mapsto x^n f(x)](\omega) = \mathrm{i}^n F^{(n)}(\omega), \qquad \textit{(differenciálás „frekvenciában”),} \tag{9e}$$

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\omega) = (\mathrm{i}\omega)^n F(\omega), \qquad \textit{(differenciálás „időben”).} \tag{9f}$$

A fenti egyenletekben $\alpha, \beta, x_0, \omega_0 \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, és (9e)-ben valamint (9f)-ben feltesszük, hogy a bal oldalon álló Fourier-transzformáltak léteznek.

3. Az $\mathcal{F}[f] = F$ függvény segítségével fejezzük ki a következő függvények Fourier-transzformáltját!

(a) $f(2x-3)$, (b) $f\big(2(x-3)\big)$,

(c) $\big(x^2 f(3x)\big)''$, (d) $x^3 f''(x-3)$.

a) DEFINÍCIÓVAL:

$$\mathcal{F}[\underbrace{f(2x-3)}_{x\mapsto f(2x-3)}](\omega) = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \underbrace{f(2x-3)}_{t=2x-3}\, dx = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \overbrace{e^{-i\omega \frac{t+3}{2}}}^{e^{-i\frac{\omega}{2}t}\cdot e^{-\frac{3}{2}i\omega}} f(t)\frac{1}{2}\,dt =$$

$$x = \frac{t+3}{2}; \quad dx = \frac{1}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{3i\omega}{2}} \underbrace{\int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\omega}{2}t} f(t)\,dt}_{F\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{1}{2} e^{-\frac{3i\omega}{2}} \cdot F\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

AZONOSSÁGOKKAL:

$$\mathcal{F}[x \mapsto f(x)](\omega) = F(\omega) \iff \mathcal{F}[f] = F$$

$\Downarrow$ ELTOLÁS

$$\mathcal{F}[x \mapsto f(x-3)](\omega) = e^{-i3\omega} F(\omega)$$

$\Downarrow$ DILATÁCIÓ $\quad \omega/2$

$$\mathcal{F}[x \mapsto f(2x-3)](\omega) = \frac{1}{2} e^{-i3\frac{\omega}{2}} F\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \checkmark$$

b, AZONOSSÁGOK (FORDÍTOTT SORRENDBEN)

$$\mathcal{F}[f] = F$$

$\Downarrow$ DILATÁCIÓ

$$\mathcal{F}[x \mapsto f(2x)](\omega) = \frac{1}{2} F\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$\Downarrow$ ELTOLÁS

$$\mathcal{F}[x \mapsto f(2(x-3))](\omega) = e^{-i3\omega} \frac{1}{2} F\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

DEFINÍCIÓVAL:

$$\mathcal{F}[f(2(x-3))](\omega) = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(\underbrace{2(x-3)}_{t=2(x-3)})\, dx =$$

$$x = \frac{t}{2} + 3 \; ; \; dx = \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t=-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-i\omega\left(\frac{t}{2}+3\right)}}_{e^{-i\frac{\omega}{2}t} \cdot e^{-3i\omega}} f(t)\, dt = \frac{1}{2} e^{-3i\omega} F\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \checkmark$$

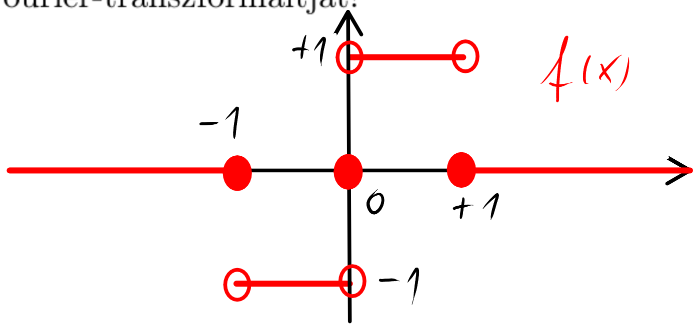
c, $\mathcal{F}[(x^2 f(3x))''] \overset{(9f)}{=} \underbrace{(i\omega)^2}_{-\omega^2} \cdot \mathcal{F}[x^2 f(3x)](\omega) \overset{(9e)}{=}$

$$= \underbrace{i^2}_{-1} \cdot (-\omega^2) \frac{d^2}{d\omega^2}\Big(\underbrace{\mathcal{F}[f(3x)](\omega)}_{\frac{1}{3} F(\frac{\omega}{3})}\Big) = \underline{\frac{\omega^2}{27} F''\left(\frac{\omega}{3}\right)}$$

d, — LÁSD JEGYZET

5. Határozzuk meg a következő függvények Fourier-transzformáltját!

(b) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in (0,1), \\ -1, & \text{ha } x \in (-1,0), \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$



DEFINÍCIÓVAL

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx = -\int_{x=-1}^{0} e^{-i\omega x}\,dx + \int_{0}^{+1} e^{-i\omega x}\,dx =$$

$t = -x$

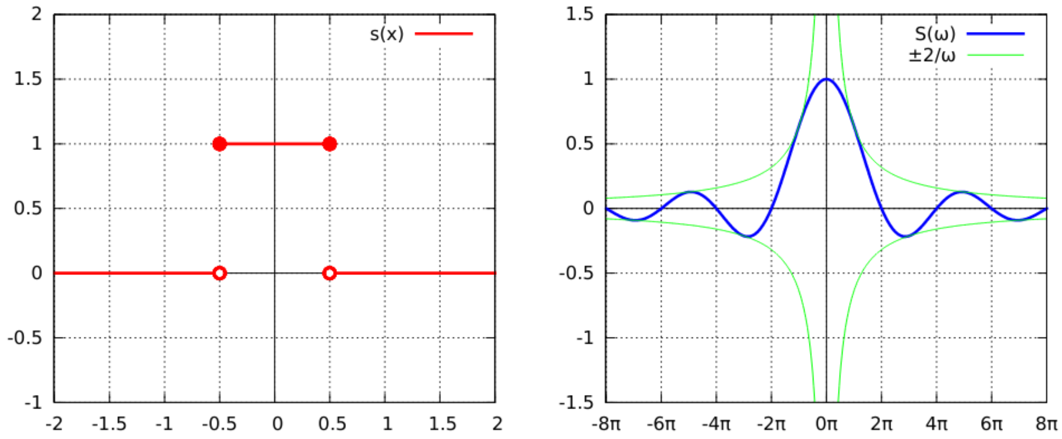
$dt = -dx$

$$= \overset{-}{\cancel{+}}\int_{t=+1}^{0} e^{+i\omega t}(+dt) + \int_{0}^{1} e^{-i\omega x}\,dx =$$

$$= \int_{x=0}^{1}\Big(\underbrace{\overbrace{-e^{i\omega x}}^{-(\cos(\omega x)+i\sin(\omega x))} + \overbrace{e^{-i\omega x}}^{\cos(\omega x)-i\sin(\omega x)}}_{-2i\sin(\omega x)}\Big)\,dx = -2i\underbrace{\int_{x=0}^{1}\sin(\omega x)\,dx}_{\left[\frac{-\cos(\omega x)}{\omega}\right]_{x=0}^{1}} =$$

$$= \frac{-2i}{\omega}\Big(\underbrace{\overbrace{-\cos(\omega)}^{-\cos^2(\frac{\omega}{2})+\sin^2(\frac{\omega}{2})} + \overbrace{1}^{\cos^2(\frac{\omega}{2})+\sin^2(\frac{\omega}{2})}}_{2\sin^2(\frac{\omega}{2})}\Big) = \underline{\frac{-4i}{\omega}\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

TRANSZFORMÁCIÓVAL (−4−)



1. ábra. Az $s(x)$ egységnyi négyszögimpulzus és $S(\omega) = \frac{2}{\omega}\sin(\frac{\omega}{2})$ Fourier-transzformáltja.

$f(x) = -s(x+\frac{1}{2}) + s(x-\frac{1}{2})$ $\mathcal{F}$ LINEÁRIS

$\mathcal{F}[f](\omega) = \mathcal{F}[-s(x+\frac{1}{2}) + s(x-\frac{1}{2})](\omega) =$

$= -\underbrace{\mathcal{F}[s(x+\frac{1}{2})](\omega)}_{e^{+i\frac{\omega}{2}} S(\omega)} + \underbrace{\mathcal{F}[s(x-\frac{1}{2})](\omega)}_{e^{-i\omega\frac{1}{2}} \underbrace{\mathcal{F}[s](\omega)}_{S(\omega)}} =$ ELTOLÁSI SZAB.

$= \underbrace{S(\omega)}_{\frac{2}{\omega}\sin(\frac{\omega}{2})}\underbrace{\left(-e^{+i\frac{\omega}{2}} + e^{-i\frac{\omega}{2}}\right)}_{-2i\sin(\frac{\omega}{2})} = \underline{-\frac{4i}{\omega}\sin^2(\frac{\omega}{2})}$ ✓

8. Tudjuk, hogy

$$\mathcal{F}[x \mapsto e^{-|x|}](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

(a) Mi a Fourier-transzformáltja $f(x) = e^{-|3x-6|}$-nak?

I-5-1

AZONOSSÁGOKKAL

$$\mathcal{F}[e^{-|x|}](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

$\Downarrow$ ELTOLÁS

$$\mathcal{F}[e^{-|x-6|}](\omega) = e^{-i6\omega} \cdot \frac{2}{1+\omega^2} \qquad \omega \to \omega/3$$

$\Downarrow$ DILATÁCIÓ

$$\mathcal{F}[e^{-|3x-6|}](\omega) = \frac{1}{3} e^{-i2\omega} \frac{2}{1+\left(\frac{\omega}{3}\right)^2}$$

DEFINÍCIÓ SZERINT

$t = 3x-6; \quad x = \frac{t+6}{3}; \quad dx = \frac{dt}{3}$

$$\mathcal{F}[e^{-|3x-6|}](\omega) = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-\overbrace{|3x-6|}} dx =$$

$$= \int_{t=-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-i\omega\frac{t+6}{3}}}_{e^{-i\frac{\omega}{3}t} \cdot e^{-2i\omega}} e^{-|t|} \cdot \frac{1}{3}\, dt = \frac{1}{3} e^{-2i\omega} \mathcal{F}[e^{-|x|}]\left(\frac{\omega}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} e^{-2i\omega} \frac{2}{1+\left(\frac{\omega}{3}\right)^2}$$

✓